TAFELN

FÜR DIE

RIEMANNSCHE ZETAFUNKTION

VON

J. P. GRAM

HERAUSGEGEBEN VON

N. E. NÖRLUND

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, X. 3.

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1925

Die folgenden von C. Burrau im Oktober 1924 unter den nachgelassenen Papieren J. P. Grams aufgefundenen Tafeln für die Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s = \sigma + it)$$

werden auf mehrfachen Wunsch hin herausgegeben. Sie sind auf Veranlassung und unter Leitung Grams in den Jahren 1903/04 durch H. S. Nielsen berechnet worden.

Die ersten umfassenderen Tafeln für die ζ-Funktion verdankt man Euler[1]) und Legendre[2]). Sie enthalten die Werte von $\zeta(s)$ für alle positiven ganzen s im Intervall $2 \leq s \leq 16$ bzw. $2 \leq s \leq 35$. Die Funktionswerte sind auf 16 Dezimalen angegeben, aber die letzte Dezimale ist nicht zuverlässig. Bei Euler finden sich z. T. sogar beträchtliche Fehler. Die Legendresche Tafel ist wiederabgedruckt in Grams Abhandlung: »Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse«[3]) unter Hinzufügung der natürlichen Logarithmen der Tafelwerte nach einer Berechnung von Merrifield[4]) sowie ihrer Briggsschen Logarithmen nach Grams eigener Berechnung. Stieltjes[5]) hat die Legendresche Tafel erweitert und die Werte von $\zeta(s)$ für ganzzahlige Werte von s im Intervall $2 \leq s \leq 70$ auf 32 Dezimalen berechnet. Die erste der nachfolgenden Tafeln umfasst das Intervall $-24 \leq s \leq 24$ und gibt die Werte von $\zeta(s)$ nicht nur für ganzzahlige s, sondern auch für die dazwischenliegenden Zehntel. Die zweite Tafel umfasst das Intervall $-2 \leq s \leq 4$ und enthält die Werte der ganzen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ sowie deren Differenzen bis zur fünften Ordnung.

Die Reihe (1) konvergiert nur für $\sigma > 1$, aber man kann aus ihr leicht eine Entwicklung herleiten, die $\zeta(s)$ für willkürlich gewählte Werte von s darstellt und

---

1) Institutiones calculi differentialis 2, Petersburg 1755, p. 456.

2) Traité des fonctions elliptiques, et des intégrales eulériennes 2, Paris 1826, p. 432.

3) Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og mathematisk Afd., (6) 2 (1884), Nr. 6.

4) The sums of the series of reciprocals of the prime numbers and their powers, Proceedings of the Royal Society of London 33 (1881), p. 4—10.

5) Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^{\infty} n^{-k}$, Acta mathematica 10 (1887), p. 299—302.

gleichzeitig zur numerischen Berechnung der Funktion geeignet ist. Es sei $0 \leqq h \leqq 1$. Dann folgt aus der Euler-Maclaurinschen Summenformel die Gleichung

$$\frac{1}{(x+h)^s} =$$

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{x^{s-1}}-\frac{1}{(x+1)^{s-1}}\right)+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_r(h)}{r!}s(s+1)\cdots(s+r-2)\left(\frac{1}{x^{s+r-1}}-\frac{1}{(x+1)^{s+r-1}}\right)$$

$$-(-1)^m\int_0^1\frac{\bar{B}_m(h-z)}{m!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)}{(x+z)^{s+m}}\,dz,$$

wobei die $B_r(h)$ die Bernoullischen Polynome sind, während $\bar{B}_r(z)$ die periodische Funktion mit der Periode 1 bezeichnet, welche im Intervall $0 \leqq z < 1$ mit dem Bernoullischen Polynom $B_r(z)$ übereinstimmt. Für $\sigma > 1$ erhält man hieraus

$$(1)\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(x+h+r)^s}=\frac{1}{s-1}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{B_r(h)}{r!}\,\frac{(s-1)s(s+1)\cdots(s+r-2)}{x^{s+r-1}}$$

$$-(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{\bar{B}_m(h-z)}{m!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)}{(x+z)^{s+m}}\,dz.$$

Verschiedene spezielle Werte von h geben bemerkenswerte Ausdrücke für $\zeta(s)$. Für $h = 1$, $x = n$ und $2m$ statt m bekommt man

$$(2)\quad \zeta(s)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^s}+\frac{1}{s-1}\,\frac{1}{n^{s-1}}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^s}+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2r-2)}{n^{s+2r-1}}$$

$$-\int_n^{\infty}\frac{\bar{B}_{2m}(z)}{(2m)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2m-1)}{z^{s+2m}}\,dz,$$

wobei die Zahlen B_r die Bernoullischen Zahlen sind. Für $h=\frac{1}{2}$, $x=n+\frac{1}{2}$ und $2m$ statt m ergibt sich

$$(3)\quad \zeta(s)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^s}+\frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{s-1}}+2^{s-1}\sum_{r=1}^{m}\frac{D_{2r}}{(2r)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2r-2)}{(2n+1)^{s+2r-1}}$$

$$-\int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\bar{B}_{2m}(z)}{(2m)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2m-1)}{z^{s+2m}}\,dz.$$

Die Integrale in den letzten beiden Formeln konvergieren für $\sigma > -2m$. Daher stellen die Entwicklungen (2) und (3) für jeden von $s = 1$ verschiedenen Wert von s in dieser Halbebene die Funktion $\zeta(s)$ dar. Insbesondere entspringt für $s = 0$ die Beziehung

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich aus der Booleschen Summenformel die Gleichung

$$\frac{2}{(x+h)^s} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{E_r(h)}{r!} s(s+1)\cdots(s+r-1)\left(\frac{1}{x^{s+r}} + \frac{1}{(x+1)^{s+r}}\right)$$
$$-(-1)^m \int_0^1 \frac{\bar{E}_m(h-z)}{m!} \frac{s(s+1)\cdots(s+m)}{(x+z)^{s+m+1}} dz$$

herleiten, in der die $E_r(h)$ die Eulerschen Polynome sind, während mit $\bar{E}_r(z)$ die Funktion bezeichnet ist, welche der Relation

$$\bar{E}_r(z+1) = -\bar{E}_r(z)$$

genügt und im Intervall $0 \leqq z < 1$ mit dem Eulerschen Polynom $E_r(z)$ zusammenfällt. Für $\sigma > 0$ gewinnt man aus der aufgeschriebenen Gleichung die Beziehung

$$2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(x+h+r)^s} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{E_r(h)}{r!} \frac{s(s+1)\cdots(s+r-1)}{x^{s+r}}$$
$$-(-1)^m \int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m(h-z)}{m!} \frac{s(s+1)\cdots(s+m)}{(x+z)^{s+m+1}} dz.$$

Da nun

$$(2^{1-s}-1)\zeta(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^s}$$

ist, so kommt für $h = \frac{1}{2}$, $x = n + \frac{1}{2}$ und $2m$ statt m die Gleichung

$$(4) \qquad (2^{1-s}-1)\zeta(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r^s} - (-1)^n 2^{s-1} \sum_{r=0}^{m} \frac{E_{2r}}{(2r)!} \frac{s(s+1)\cdots(s+2r-1)}{(2n+1)^{s+2r}}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\bar{E}_{2m}(z)}{(2m)!} \frac{s(s+1)\cdots(s+2m)}{z^{s+2m+1}} dz$$

zustande, in der die Zahlen E_r die Eulerschen Zahlen bedeuten. Für $h = 1$, $x = n$ hingegen findet man

$$(5)\quad (2^{1-s}-1)\,\zeta(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r^s} - \frac{(-1)^n}{2}\,\frac{1}{n^s} - (-1)^n \sum_{n=0}^{m-1} \frac{C_{2r+1}}{2^{2r+2}(2r+1)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2r)}{n^{s+2r+1}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_n^\infty \frac{\bar{E}_{2m}(z)}{(2m)!}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+2m)}{z^{s+2m+1}}\,dz.$$

Da die Integrale in den Formeln (4) und (5) für $\sigma > -2m-1$ konvergieren, sind die Gleichungen (4) und (5) in dieser Halbebene gültig. Läßt man in (2), (3), (4) und (5) die Zahl m unbegrenzt zunehmen, so divergieren die vier hierdurch zustandekommenden unendlichen Reihen für jeden von $s=0, -1, -2, -3, \ldots$ verschiedenen Wert von s. Trotzdem sind diese Reihen zur numerischen Berechnung gut geeignet, namentlich für kleine [1]) (positive oder negative) Werte von s. Wählt man nämlich n hinreichend groß, so nehmen die Reihenglieder zunächst stark ab, um erst später über alle Grenzen anzuwachsen. Nun zeigt aber der oben angegebene Integralausdruck für das Restglied, daß dieses bei reellem s numerisch kleiner als das letzte berücksichtigte Glied in der Reihe und von entgegengesetztem Zeichen ist, während es dasselbe Zeichen wie das erste vernachlässigte Glied hat [2]). Man kann also, wenn man nur n passend wählt, mit Hilfe der oben angeführten Reihen eine sehr große Genauigkeit erzielen.

Aus den Aufzeichnungen J. P. Grams geht hervor, daß die Werte von $\zeta(s)$ für kleine positive Werte von s nach der Formel (2), die sich ausführlicher folgendermaßen schreiben läßt:

$$\zeta(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^s} + \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^s} + \frac{1}{12}\,\frac{s}{n^{s+1}} - \frac{1}{720}\,\frac{s(s+1)(s+2)}{n^{s+3}}$$

$$+\frac{1}{30240}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+4)}{n^{s+5}} - \frac{1}{1209600}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+6)}{n^{s+7}}$$

$$+\frac{1}{47900160}\,\frac{s(s+1)\cdots(s+8)}{n^{s+9}} - \cdots,$$

berechnet worden sind und daß für das Intervall $-\frac{1}{2} \leqq s \leqq \frac{1}{2}$ gleichzeitig die Potenzreihe

$$s\,\zeta(s+1) = 1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + \cdots$$

[1]) Hauptsächlich für diese Werte macht die Berechnung Schwierigkeiten, während man für große positive Werte von s mit Vorteil die Reihe (1) benutzen und dann mittels der Funktionalgleichung zu (absolut) großen negativen Werten von s übergehen kann.

[2]) Für den ausführlichen Beweis hierfür vgl. N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, p. 60—61. In diesem Buche befindet sich außerdem auf p. 457—458 eine von A. Walther berechnete Tafel der Zahlen B_r, C_r, D_r und E_r.

benutzt worden ist, deren Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ J. L. W. V. JENSEN[1]) auf 9 Dezimalen und J. P. GRAM in einer früheren Arbeit[2]) auf 16 Dezimalen ermittelt hat. Für negative s ist $\zeta(s)$ mit Hilfe der Riemannschen Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{\pi s}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s) \tag{6}$$

berechnet. Geprüft sind die Rechnungen teils durch Differenzenproben, teils mittels der aus der Funktionalgleichung abgeleiteten Relation

$$s(s+1)\frac{\zeta(s+2)\,\zeta(1-s)}{\zeta(s)\,\zeta(-1-s)} = -4\pi^2.$$

Zur weiteren Kontrolle haben der Herausgeber und G. RASCH eine Neuberechnung von 15 Zahlwerten mit Hilfe der Reihen (3), (4) und (5) vorgenommen.

[1]) Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN, C. R. Académie des Sciences Paris 104 (1887), p. 1156—1159.

[2]) Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Oversigter 1895, p. 303—308.

Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion.

s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$
—24.0	0.000000	—21.0	—281.4601449	—18.0	0.000000000
—23.9	+1881.735233	—20.9	245.8715089	—17.9	—1.228853006
.8	3246.186820	.8	209.4926947	.8	2.180715374
.7	4166.598749	.7	173.7487056	.7	2.879716789
.6	4714.946870	.6	139.7273086	.6	3.353101197
.5	4959.598315	.5	108.2174751	.5	3.629759300
.4	4963.676398	.4	79.74924761	.4	3.739009234
.3	4784.016857	.3	54.63336452	.3	3.709611359
.2	4470.608038	.2	32.99936446	.2	3.568998940
.1	4066.416588	.1	—14.83123948	.1	3.342703781
—23.0	3607.510546	—20.0	0.00000000	—17.0	3.053954330
—22.9	3123.402717	—19.9	+11.70723710	—16.9	2.723423297
.8	2637.548156	.8	20.56182100	.8	2.369102032
.7	2167.940390	.7	26.87182169	.7	2.006279892
.6	1727.760914	.6	30.96386172	.6	1.647608086
.5	1326.045812	.5	33.16832578	.5	1.303229251
.4	968.3414709	.4	33.80768331	.4	0.9809558364
.3	657.3286330	.3	33.18761664	.3	0.6864823979
.2	393.4001663	.2	31.59062487	.2	0.4236188950
.1	+175.1831354	.1	29.27176688	.1	—0.1945340877
—22.0	0.0000000	—19.0	26.45621212	—16.0	0.0000000000
—21.9	—135.7328324	—18.9	23.33828364	—15.9	+0.1603698061
.8	236.1682369	.8	20.08169892	.8	0.2878937895
.7	305.7505595	.7	16.82074107	.7	0.3846120098
.6	348.9925444	.6	13.66212168	.6	0.4530946407
.5	370.3018784	.5	10.68732707	.5	0.4962712199
.4	373.8517175	.4	7.955269647	.4	0.5172815046
.3	363.4893719	.3	5.505095299	.3	0.5193480261
.2	342.6773815	.2	3.359025149	.2	0.5056698129
.1	314.4614581	.1	+1.525135183	.1	0.4793362658

s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$
—15.0	+0.4432598039	—11.3	+0.0226190868	—7.6	+0.0027852131
		.2	0.0226781697	.5	0.0032690396
—14.9	0.4001256502	.1	0.0221411675	.4	0.0036537321
.8	0.3523569594	—11.0	0.0210927961	.3	0.0039360409
.7	0.3020934195			.2	0.0041147931
.6	0.2511814349	—10.9	0.0196193936	.1	0.0041907873
.5	0.2011740494	.8	0.0178067539	—7.0	0.0041666667
.4	0.1533388402	.7	0.0157382622		
.3	0.1086721354	.6	0.0134933303	—6.9	0.0040467747
.2	0.0679180381	.5	0.0111461225	.8	0.0038369975
.1	+0.0315908946	.4	0.0087645592	.7	0.0035445955
—14.0	0.0000000000	.3	0.0064095819	.6	0.0031780271
		.2	0.0041346575	.5	0.0027467679
—13.9	—0.0267245027	.1	+0.0019855021	.4	0.0022611282
.8	0.0486054180	—10.0	0.0000000000	.3	0.0017320694
.7	0.0657927238			.2	0.0011710237
.6	0.0785388189	—9.9	—0.0017917070	.1	+0.0005897175
.5	0.0871752559	.8	0.0033669820	—6.0	0.0000000000
.4	0.0920912978	.7	0.0047103332		
.3	0.0937145362	.6	0.0058129518	—5.9	—0.0005863213
.2	0.0924937111	.5	0.0066721723	.8	0.0011576367
.1	0.0888837946	.4	0.0072908732	.7	0.0017026823
—13.0	0.0833333333	.3	0.0076768377	.6	0.0022106784
		.2	0.0078420911	.5	0.0026714580
—12.9	0.0762739889	.1	0.0078022300	.4	0.0030755853
.8	0.0681121716	—9.0	0.0075757576	.3	0.0034144645
.7	0.0592226299			.2	0.0036804380
.6	0.0499438329	—8.9	0.0071834341	.1	0.0038668757
.5	0.0405749675	.8	0.0066476556	—5.0	0.0039682540
.4	0.0313743626	.7	0.0059918657		
.3	0.0225591500	.6	0.0052400095	—4.9	0.0039802270
.2	0.0143059731	.5	0.0044160329	.8	0.0038996891
.1	—0.0067525619	.4	0.0035434308	.7	0.0037248299
—12.0	0.0000000000	.3	0.0026448482	.6	0.0034551831
		.2	0.0017417330	.5	0.0030916692
—11.9	+0.0058844753	.1	—0.0008540422	.4	0.0026366345
.8	0.0108642898	—8.0	0.0000000000	.3	0.0020938853
.7	0.0149300963			.2	0.0014687209
.6	0.0180962045	—7.9	+0.0008040932	.1	—0.0007679656
.5	0.0203969787	.8	0.0015440037	—4.0	0.0000000000
.4	0.0218832886	.7	0.0022076611		

s	ζ (*s*)	*s*	ζ (*s*)	*s*	ζ (*s*)
—3.9	+0.0008252041	—0.1	—0.4172280406	3.6	+1.1159890791
.8	0.0016960464	0.0	0.5000000000	.7	1.1062882415
.7	0.0025992550			.8	1.0975105765
.6	0.0035198356	+0.1	0.6030375199	.9	1.0895521847
.5	0.0044410113	.2	0.7339209249	4.0	1.0823232337
.4	0.0053441503	.3	0.9045592572		
.3	0.0062086781	.4	1.1347977839	4.1	1.0757456903
.2	0.0070119721	.5	1.4603545088	.2	1.0697514772
.1	0.0077292335	.6	1.9526614482	.3	1.0642809643
—3.0	0.0083333333	.7	2.7783884455	.4	1.0592817260
		.8	4.4375384158	.5	1.0547075108
—2.9	0.0087946268	.9	—9.4301140194	.6	1.0505173826
.8	0.0090807295	1.0	∞	.7	1.0466750002
.7	0.0091562490			.8	1.0431480133
.6	0.0089824624	1.1	+10.5844484649	.9	1.0399075440
.5	0.0085169288	.2	5.5915824412	5.0	1.0369277551
.4	0.0077130240	.3	3.9319492118		
.3	0.0065193805	.4	3.1055472780	5.1	1.0341854747
.2	0.0048792124	.5	2.6123753487	.2	1.0316598767
.1	+0.0027294998	.6	2.2857656657	.3	1.0293322057
—2.0	0.0000000000	.7	2.0542887568	.4	1.0271855389
		.8	1.8822296181	.5	1.0252045800
—1.9	—0.0033879560	.9	1.7497464351	.6	1.0233754792
.8	0.0075229348	2.0	1.6449340668	.7	1.0216856774
.7	0.0125052079			.8	1.0201237684
.6	0.0184489867	2.1	1.5602165335	.9	1.0186793787
.5	0.0254852019	.2	1.4905432565	6.0	1.0173430620
.4	0.0337649877	.3	1.4324177993		
.3	0.0434640829	.4	1.3833428588	6.1	1.0161062050
.2	0.0547884412	.5	1.3414872573	.2	1.0149609452
.1	0.0679814517	.6	1.3054778091	.3	1.0139000975
—1.0	0.0833333333	.7	1.2742646444	.4	1.0129170886
		.8	1.2470314223	.5	1.0120058999
—0.9	0.1011935040	.9	1.2231338953	.6	1.0111610141
.8	0.1219870777	3.0	1.2020569032	.7	1.0103773705
.7	0.1462371917			.8	1.0096503226
.6	0.1745957119	3.1	1.1833836521	.9	1.0089756000
.5	0.2078862250	.2	1.1667733710	7.0	1.0083492774
.4	0.2471654608	.3	1.1519447947		
.3	0.2938130681	.4	1.1386637757	7.1	1.0077677418
.2	0.3496662806	.5	1.1267338673	.2	1.0072276665

s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$
7.3	1.0067259864	11.1	1.0004608681	14.9	1.0000327868
.4	1.0062598760	.2	1.0004298029	15.0	1.0000305882
.5	1.0058267275	.3	1.0004008396		
.6	1.0054241360	.4	1.0003738350	15.1	1.0000285372
.7	1.0050498793	.5	1.0003486559	.2	1.0000266238
.8	1.0047019048	.6	1.0003251783	.3	1.0000248387
.9	1.0043783149	.7	1.0003032866	.4	1.0000231735
8.0	1.0040773562	.8	1.0002828731	.5	1.0000216199
		.9	1.0002638376	.6	1.0000201706
8.1	1.0037974046	12.0	1.0002460866	.7	1.0000188184
.2	1.0035369583			.8	1.0000175570
.3	1.0032946268	12.1	1.0002295330	.9	1.0000163802
.4	1.0030691222	.2	1.0002140958	16.0	1.0000152823
.5	1.0028592509	.3	1.0001996993		
.6	1.0026639075	.4	1.0001862732	16 1	1 0000142580
.7	1.0024820667	.5	1.0001737517	.2	1.0000133024
.8	1.0023127779	.6	1.0001620738	.3	1.0000124109
.9	1.0021551592	.7	1.0001511823	.4	1.0000115791
9.0	1.0020083928	.8	1.0001410242	.5	1.0000108031
		.9	1.0001315500	.6	1.0000100792
9.1	1.0018717192	13.0	1.0001227133	.7	1.0000094037
.2	1.0017444335			.8	1.0000087736
.3	1.0016258815	13.1	1.0001144713	.9	1.0000081857
.4	1.0015154553	.2	1.0001067838	17.0	1.0000076372
.5	1.0014125906	.3	1.0000996134		
.6	1.0013167628	.4	1.0000929252	17.1	1.0000071255
.7	1.0012274846	.5	1.0000866867	.2	1.0000066480
.8	1.0011443030	.6	1.0000808676	.3	1.0000062026
.9	1.0010667969	.7	1.0000754397	.4	1.0000057870
10.0	1.0009945751	.8	1.0000703766	.5	1.0000053993
		.9	1.0000656537	.6	1.0000050376
10.1	1.0009272734	14.0	1.0000612481	.7	1.0000047001
.2	1.0008645534			.8	1.0000043852
.3	1.0008061001	14.1	1.0000571386	.9	1.0000040914
.4	1.0007516207	.2	1.0000533050	18.0	1.0000038173
.5	1.0007008426	.3	1.0000497289		
.6	1.0006535124	.4	1.0000463930	18.1	1.0000035616
.7	1.0006093940	.5	1.0000432810	.2	1.0000033230
.8	1.0005682678	.6	1.0000403780	.3	1.0000031004
.9	1.0005299295	.7	1.0000376699	.4	1.0000028927
11.0	1.0004941886	.8	1.0000351436	.5	1.0000026989

s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$	s	$\zeta(s)$
18.6	1.0000025181	20.4	1.0000007229	22.2	1.0000002076
.7	1.0000023494	.5	1.0000006745	.3	1.0000001937
.8	1.0000021920	.6	1.0000006293	.4	1.0000001807
.9	1.0000020452	.7	1.0000005872	.5	1.0000001686
19.0	1.0000019082	.8	1.0000005479	.6	1.0000001573
		.9	1.0000005112	.7	1.0000001468
19.1	1.0000017804	21.0	1.0000004769	.8	1.0000001369
.2	1.0000016611			.9	1.0000001278
.3	1.0000015499	21.1	1.0000004450	23.0	1.0000001192
.4	1.0000014461	.2	1.0000004152		
.5	1.0000013492	.3	1.0000003874	23.1	1.0000001112
.6	1.0000012588	.4	1.0000003614	.2	1.0000001038
.7	1.0000011745	.5	1.0000003372	.3	1.0000000968
.8	1.0000010958	.6	1.0000003146	.4	1.0000000903
.9	1.0000010224	.7	1.0000002936	.5	1.0000000843
20.0	1.0000009540	.8	1.0000002739	.6	1.0000000787
		.9	1.0000002556	.7	1.0000000734
20.1	1.0000008901	22.0	1.0000002385	.8	1.0000000685
.2	1.0000008305			.9	1.0000000639
.3	1.0000007748	22.1	1.0000002225	24.0	1.0000000596

---

s	$(s-1)\,\zeta(s)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
−2.0	+0.0000000000		13636230		−37543
		98250724		504496	
1.9	0.0098250724		14140726		38253
		112391450		466263	
.8	0.0210642174		14606989		38650
		126998439		427613	
.7	0.0337640613		15034602		38862
		142033041		388751	
.6	0.0479673654		15423353		38841
		157456394		349910	
.5	0.0637130048		15773263		38628
		173229657		311282	
.4	0.0810359705		16084545		38230
		189314202		273052	

s	$(s-1)\,\zeta(s)$	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
— 1.3	0.0999673907		16537597		— 37668
		205671799		235384	
.2	0.1205345706		16592981		36964
		222264780		198420	
.1	0.1427610486		16791401		36093
		239056181		162327	
1.0	0.1666666667		16953728		35141
		256009909		127186	
0.9	0.1922676576		17080914		34063
		273090823		93123	
.8	0.2195767399		17174037		32889
		290264860		60234	
.7	0.2486032259		17234271		31651
		307499131		+ 28583	
.6	0.2793531390		17262854		30346
		324761985		— 1763	
.5	0.3118293375		17261091		28970
		342023076		30733	
.4	0.3460316451		17230358		27577
		359253434		58310	
.3	0.3819569885		17172048		26140
		376425482		84450	
.2	0.4195995367		17087598		24675
		393513080		109125	
.1	0.4589508447		16978473		23222
		410491553		132347	
0.0	0.5000000000		168461252		21736
		4273376786		1540830	
+ 0.1	0.54273376786		166920422		202793
		4440297208		1743623	
.2	0.58713673994		165176799		188153
		4605474007		1931776	
.3	0.63319148001		163245023		173864
		4768719030		2105640	
.4	0.68087867031		161139383		159671
		4929858413		2265311	
.5	0.73017725444		158874072		145810
		5088732485		2411121	
.6	0.78106457929		156462951		132315
		5245195436		2543436	
.7	0.83351653365		153919515		119152
		5399114951		2662588	

s	$(s-1)\,\zeta(s)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.8	0.88750768316		151256927		—106411
		5550371878		—2768999	
.9	0.94301140194		148487928		94086
		5698859806		2863085	
1.0	1.00000000000		145624843		82232
		5844484649		2945317	
.1	1.05844484649		142679526		70854
		5987164175		3016171	
.2	1.11831648824		139663355		59948
		6126827530		3076119	
.3	1.17958476354		136587236		49568
		6263414766		3125687	
.4	1.24221891120		133461549		39670
		6396876315		3165357	
.5	1.30618767435		130296192		30308
		6527172507		3195665	
.6	1.37145939942		127100527		21424
		6654273034		3217089	
.7	1.43800212976		123883438		13110
		6778156472		3230199	
.8	1.50578369448		120653239		—5230
		6898809711		3235429	
.9	1.57477179159		117417810		+ 2103
		7016227521		3233326	
2.0	1.64493406680		114184484		8932
		7130412005		3224394	
.1	1.71623818685		110960090		15338
		7241372095		3209056	
.2	1.78865190780		107751034		21216
		7349123129		3187840	
.3	1.86214313909		104563194		26671
		7453686323		3161169	
.4	1.93668000232		101402025		31672
		7555088348		3129497	
.5	2.01223088580		98272528		36185
		7653360876		3093312	
.6	2.08876449456		95179216		40470
		7748540092		3052842	
.7	2.16624989548		92126374		44095
		7840666466		3008747	
.8	2.24465656014		89117627		47560
		7929784093		2961187	

s	$(s-1)\,\zeta(s)$	$\triangle$	$\triangle^2$	$\triangle^3$	$\triangle^4$
2.9	2.32395440107		86156440		50515
		8015940533		—2910672	
3.0	2.40411380640		83245768		53282
		8099186301		2857390	
.1	2.48510566941		80388378		55494
		8179574679		2801896	
.2	2.56690141620		77586482		57640
		8257161161		2744256	
.3	2.64947302781		74842226		59300
		8332003387		2684956	
.4	2.73279306168		72157270		60770
		8404160657		2624186	
.5	2.81683466825		69533084		62000
		8473693741		2562186	
.6	2.90157160566		66970898		62864
		8540664639		2499322	
.7	2.98697825205		64471576		63674
		8605136215		2435648	
.8	3.07302961420		62035928		64124
		8667172143		2371524	
.9	3.15970133563		59664404		64353
		8726836547		2307171	
4.0	3.24696970110		57357233		64771